



۱) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟

- ☐ ۱ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
☐ ۲ $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
☐ ۳ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
☐ ۴ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟

- ☐ ۱ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$
☐ ۲ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$
☐ ۳ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
☐ ۴ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۳) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ☐ ۱ $\frac{14\pi}{3}$
☐ ۲ 4π
☐ ۳ $\frac{9\pi}{2}$
☐ ۴ 5π

۴) معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x + 4\sin x - 3}{\sin x - 1} = 3$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ☐ ۱ ۱
 ☐ ۲ ۲
 ☐ ۳ ۳
 ☐ ۴ ۴

۵) معادله‌ی $(3\sin x - 1)(3\cos x - 2\sqrt{2}) = 0$ در فاصله‌ی $0 \leq x \leq \pi$ چند ریشه‌ی متمایز دارد؟

- ☐ ۱ دو ریشه
 ☐ ۲ سه ریشه
 ☐ ۳ چهار ریشه
 ☐ ۴ ریشه ندارد.

۶) مجموع جواب‌های معادله‌ی $\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ کدام است؟

- ☐ ۱ π
☐ ۲ $\frac{7\pi}{5}$
☐ ۳ $\frac{5\pi}{8}$
☐ ۴ $\frac{3\pi}{4}$

۷) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- ☐ ۱ $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$
☐ ۲ $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$
☐ ۳ $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$
☐ ۴ $x = k\pi - \frac{\pi}{6}$

۸) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟

- ☐ ۱ $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$
☐ ۲ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
☐ ۳ $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$
☐ ۴ $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۹) جواب کلی معادله‌ی $\cos 4x + 2\sin^2 x = 1$ کدام است؟

- ☐ ۱ $x = 2k\pi$
☐ ۲ $x = \frac{k\pi}{2}$
☐ ۳ $x = k\pi$
☐ ۴ $x = \frac{k\pi}{3}$

۱۰) نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه‌ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

- ☐ ۱ ۲
 ☐ ۲ ۳
 ☐ ۳ ۴
 ☐ ۴ ۵

۱۱) معادله‌ی $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - \sin 2x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ☐ ۱ ۲
 ☐ ۲ ۳
 ☐ ۳ ۴
 ☐ ۴ ۵



۱۲) معادله $\sin x (\tan x + \cot x) = 1$ چند جواب حقیقی در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۴

۱۳) به ازای چه مقادیری از a معادله $\tan x + 3a \cot x = 2$ جواب دارد؟

① $a \geq 3$

② $a \geq \frac{1}{3}$

③ $a \leq 3$

④ $a \leq \frac{1}{3}$



پاسخنامه تشریحی

می‌دانیم: $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2 \cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0 \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \quad k=0,1,2 \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x = k\pi \pm \alpha} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

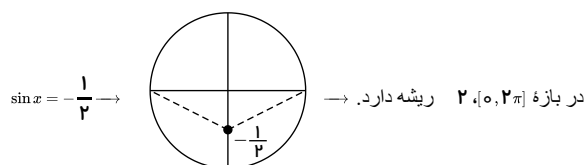
بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$ است.

می‌دانیم $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\frac{\cos 2x + 4 \sin x - 3}{\sin x - 1} = 3 \rightarrow \cos 2x + 4 \sin x - 3 = 3 \sin x - 3$$

$$\rightarrow \cos 2x + \sin x = 0 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \sin x = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

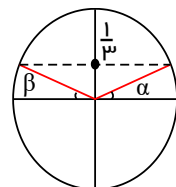
غقوق (مخرج را صفر می‌کند). $\sin x = 1$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

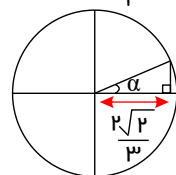
ضرب دو عبارت صفر شده پس تک آن‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$3 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}$$



برای $\sin x = \frac{1}{3}$ دو جواب در ناحیه‌ی اول و دوم وجود دارد.

$$3 \cos x - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{یک ریشه دارد}$$



اما باید دقت کرد که این دو جوابی که برای $\sin x$ و $\cos x$ به دست آمده یکسان نباشد. چون: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$

پس در نهایت این معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد.



تذکر: هر زاویه‌ای که سینوس آن $\frac{1}{3}$ باشد، کسینوس آن $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ یا $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ است، زاویه‌ای که در ربع اول است کسینوس آن $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ و زاویه‌ای که در ربع دوم است کسینوس آن $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ است. پس ریشه جدیدی ایجاد نمی‌کند.

می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\cos^2 x = \sin^2 x + \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \sin^2 x \xrightarrow{\div \cos^2 x} \tan^2 x = 1 \xrightarrow{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$x \in [0, \pi] \rightarrow \begin{cases} k=0: x_1 = \frac{\pi}{4} \\ k=1: x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

می‌دانیم: $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{2} = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{4} + x)} = 1 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi} \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \rightarrow 3x=2k\pi+x \rightarrow 2x=2k\pi \rightarrow x=k\pi \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \rightarrow 3x=2k\pi+\pi-x \rightarrow 4x=2k\pi+\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون $x \neq k\pi$ می‌باشد پس جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

می‌دانیم: $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$$\cos 2x + 2\sin^2 x = 1 \rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow \cos 2x = \cos 2x$$

$$x=2k\pi+\alpha \rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+2\alpha \rightarrow 2x=2k\pi \rightarrow x=k\pi \\ 2x=2k\pi-2\alpha \rightarrow 2x=2k\pi \rightarrow x=k\pi \end{cases}$$

دقت کنید که جواب‌های $x = k\pi$ همگی در $x = \frac{k\pi}{2}$ قرار دارند بنابراین جواب کلی معادله $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ با محور x ها روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، کافی است معادله $3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$ را

روی بازه مورد نظر حل کنیم. داریم:

$$3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow -2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

حال، جواب‌های قابل قبول x را که در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ قرار دارند به دست می‌آوریم:

$$k=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}, \quad k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \quad k=-1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$k=-2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$$

در نتیجه، پنج جواب قابل قبول وجود دارد.

می‌دانیم: $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a, \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}, 1-\cos 2a = 2\sin^2 a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos 2x = 1 - \sin^2 x \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos 2x \rightarrow 2\sin x \cos x = 2\sin^2 x$$

$$\rightarrow 2\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0 \rightarrow 2\sin x(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه داده شده دارای پنج جواب است.

می‌دانیم $\tan a + \cot a = \frac{1}{\sin a \cos a}$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$\sin x(\tan x + \cot x) = 1 \rightarrow \sin x(\frac{1}{\sin x \cos x}) = 1 \rightarrow \frac{1}{\cos x} = 1 \rightarrow \cos x = 1$$

توجه کنید در نقاطی که $\cos x = 1$ است، $\sin x = 0$ است و مخرج را صفر می‌کند پس معادله جواب حقیقی ندارد.



$$\tan x + 3a \cot x = 2 \Rightarrow \tan x + \frac{3a}{\tan x} = 2$$

$$\frac{\tan x \neq 0}{\tan x = m} \Rightarrow \frac{\tan^2 x + 3a}{\tan x} = 2 \Rightarrow \tan^2 x - 2 \tan x + 3a = 0$$

شرط وجود جواب آن است که $\Delta \geq 0$ باشد. $m^2 - 2m + 3a = 0 \rightarrow$

$$\Rightarrow 4 - 4(3a) \geq 0 \Rightarrow 1 - 3a \geq 0 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

دقت کنید که معادله $\tan x = m$ همواره دارای جواب است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
----	---	---	---	---